物理学概説2011　期末テスト

(模範解答)

2011.8.8

問題１

(問題省略)

解答

(1)

①

t=(y-c)/b

$x=a(y-c)^2/b^2$

②

sin 2ωt=x/a

cos 2ωt=y/(2b)

$\sin^2 2\omega t+\cos^2 2\omega t=(x/a)^2+(y/2b)^2=1$

$x^2/a^2+y^2/4b^2=1$

(2)

$$v_x=\frac{dx}{dt}=2at\ ,\quad v_y=\frac{dy}{dt}=b$$

(3)

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=2a\ ,\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=0$$

問題２

(問題省略)

解答

(1)

$$K_1=\frac{1}{2}mv_1^2\ ,U_1=mgh_1$$

(2)

$$K_2=\frac{1}{2}mv_2^2\ ,U_2=mgh_2$$

(3)

$K_1+U_1=K_2+U_2$ より

$$\frac{1}{2}mv_1^2+mgh_1=\frac{1}{2}mv_2^2+mgh_2$$

$$\frac{1}{2}mvv_2^2=\frac{1}{2}mv_1^2+mg(h_1-h_2)$$

$$v_2^2=v_1^2+2g(h_1-h_2)$$

$$v_2=\sqrt{v_1^2+2g(h_1-h_2)}$$

(4)

$$\Delta E=\left(\frac{1}{2}mv_1^2+mgh_1\right)-\left(\frac{1}{2}mv_2^2+mgh_2\right)$$

$$=mg(h_1-h_2)$$

問題３

(問題省略)

解答

(1)

$$Fdt = Mdv$$

$$\int_0^t Fdt = \int_0^V Mdv$$
$$= MV$$

(2)

$$N_z dt = dL_z$$

$$\int_0^t N_z dt = \int_0^{L_z} dL_z$$
$$= L_z$$

(3)

$$N_z = F(h-a)$$

(4)

$$L_z = I_z \omega$$
$$\omega = \frac{L_z}{I_z} = \frac{L_z}{\frac{2}{5}Ma^2}$$

一方、

$L_z = \int_0^t N_z dt$ より、

$$L_z = \int_0^t F(h-a)dt$$
$$= (h-a)\int_0^t Fdt$$

以上の２式より、

$$\omega = \frac{(h-a)\int_0^t Fdt}{\frac{2}{5}Ma^2} = \frac{(h-a)MV}{\frac{2}{5}Ma^2} = \frac{5(h-a)}{2a^2}V$$

問題４

(問題省略)

解答

(1) 初速度の x 方向成分を v_{0x}、y 方向成分を v_{0y} とおくと、

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta,\quad v_{0y} = v_0 \sin\theta \qquad (1)$$

の関係がある。

初期条件は t=0 のとき x(0)=0、$v_x(0)=v_{0x}$、y(0)=0、$v_x(0)=v_{0y}$ とする。

空気抵抗が無い場合、x 方向の運動方程式は次式で表される。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad (2)$$

この両辺を m(>0)で割って

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad (3)$$

両辺を t で積分して

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = v_{0x} \qquad (4)$$

この両辺をさらに積分して

$$x(t) = v_{0x}t = v_0 \cos\theta\, t \qquad (5)$$

空気抵抗が無い場合、y 方向の運動方程式は次式で表される。

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \qquad (6)$$

(6)の両辺を m で割って

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \qquad (7)$$

この式を t で積分し、初期条件を考慮すると次式になる。

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = -gt + v_{0y} \qquad (8)$$

この式をさらに t で積分して

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta\, t \qquad (9)$$

(2) 最高到達点 h に到達する時間を $t=t_1$ とおく。

$$v_y(t_1) = -gt_1 + v_0 \sin\theta = 0 \tag{10}$$

より

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \tag{11}$$

(11)を(9)に代入して

$$h = y(t_1) = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^2} + v_0 \sin\theta \cdot \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$
$$= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \tag{12}$$

(3) t=t_2 のとき物体が地表に到達すると考える。

$$y(t_2) = -\frac{1}{2} g t_2^2 + v_0 \sin\theta\, t_2 = 0 \tag{13}$$

これより

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \tag{14}$$

(14)を(5)に代入すると

$$x(t_2) = v_0 \cos\theta \cdot \frac{2v_0 \sin\theta}{g} = \frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$$
$$= \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \tag{15}$$

(4) 空気抵抗が作用する場合を考える。x 方向の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt} \tag{16}$$

両辺を m で割って

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\frac{dx}{dt} = -b\frac{dx}{dt} \tag{17}$$

もしくは

$$\frac{dv_x}{dt} = -bv_x \tag{18}$$

y 方向の運動方程式は

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{dy}{dt} - mg \tag{19}$$

両辺を m で割って

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -b\frac{dy}{dt} - g \tag{20}$$

もしくは

$$\frac{dv_y}{dt} = -bv_y - g \tag{21}$$

(5) 式(18)を変数分離し、積分して $v_x(t)$と $x(t)$を求める。

$$\int \frac{1}{v_x}\, dv_x = -b\int dt \tag{22}$$

$$\ln v_x = -bt + C_1 \tag{23}$$

$$v_x(t) = e^{-bt+C_1} = C_2 e^{-bt} \tag{24}$$

初期条件

$$v_x(0) = v_{0x} \tag{25}$$

より

$$v_x(t) = v_{0x} e^{-bt} \tag{26}$$

この両辺をさらに積分して

$$x(t) = \int v_{0x} e^{-bt}\, dt = -\frac{v_{0x}}{b} e^{-bt} + C_3 \tag{27}$$

初期条件

$$x(0) = 0 \tag{28}$$

より

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{b}\left(1 - e^{-bt}\right) \tag{29}$$

y 方向は(21)を解く。

$$\int \frac{b}{bv_y + g}\, dv_y = -b\int dt \tag{30}$$

$$\ln\left|bv_y + g\right| = -bt + A_1 \tag{31}$$

$$bv_y + g = \pm e^{-bt+A_1} = A_2 e^{-bt} \tag{32}$$

$$v_y(t) = \frac{1}{b}\left(A_2 e^{-bt} - g\right) \tag{33}$$

初期条件 $v_y(0) = v_{0y}$ より(33)は

$$A_2 = bv_{0y} + g \tag{34}$$

よって

$$v_y(t) = \left(v_{0y} + \frac{g}{b}\right)e^{-bt} - \frac{g}{b} \tag{35}$$

これをさらに t で積分

$$y(t) = \int\left\{\left(v_{0y} + \frac{g}{b}\right)e^{-bt} - \frac{g}{b}\right\} dt$$
$$= -\frac{1}{b}\left(v_{0y} + \frac{g}{b}\right) e^{-bt} - \frac{g}{b} t + A_3 \tag{36}$$

初期条件 $y(0)=0$ より

$$y(t)=\frac{1}{b}\left(v_{0y}+\frac{g}{b}\right)\left(1-e^{-bt}\right)-\frac{g}{b}t \tag{37}$$

となる。

(6) y が最大となる時刻は $v_y=0$。つまり(35) がゼロになるとき。

$$\left(v_{0y}+\frac{g}{b}\right)e^{-bt}=\frac{g}{b} \tag{38}$$

$$t=-\frac{1}{b}\log\left(\frac{g}{bv_{0y}+g}\right) \tag{39}$$

もしくは

$$e^{bt}=\frac{bv_{0y}+g}{g} \tag{40}$$

より

$$t=\frac{1}{b}\log\left(\frac{bv_{0y}+g}{g}\right) \tag{41}$$

<u>問題５</u>

(問題省略)

解答

$x(t)=e^{\lambda t}$ とおく。$\dot{x}(t)=\lambda e^{\lambda t}, \ddot{x}(t)=\lambda^2 e^{\lambda t}$ である。これらを問題式に代入すると、

$$\lambda^2+3\lambda+\frac{5}{2}=0 \tag{1}$$

これを解いて

$$\lambda=\frac{-3\pm i}{2} \tag{2}$$

異なる２つの虚数解が得られたため、この方程式は減衰振動である。問題式の１次独立の解は

$$x_1(t)=B_1e^{\frac{-3+i}{2}t}, x_2(t)=B_2e^{\frac{-3-i}{2}t} \tag{3}$$

よって問題式の一般解は

$$x(t)=B_1e^{\frac{-3+i}{2}t}+B_2e^{\frac{-3-i}{2}t}=e^{\frac{-3}{2}t}\left(B_1e^{\frac{i}{2}t}+B_2e^{\frac{-i}{2}t}\right) \tag{4}$$

ここでオイラーの定理

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{5}$$

を用いて(4)を変形すると

$$x(t)$$
$$=e^{\frac{-3}{2}t}\left[B_1\left(\cos\frac{t}{2}+i\sin\frac{t}{2}\right)+B_2\left(\cos\frac{t}{2}-i\sin\frac{t}{2}\right)\right] \tag{6}$$
$$=e^{\frac{-3}{2}t}\left(C_1\cos\frac{t}{2}+C_2\sin\frac{t}{2}\right)$$

ここで C_1 および C_2 は定数である。

$$C_1=B_1+B_2,\quad C_2=i\left(B_1-B_2\right) \tag{7}$$

初期条件より

$$x(0)=C_1=0 \tag{8}$$

よって(4)は

$$x(t)=e^{\frac{-3}{2}t}C_2\sin\frac{t}{2} \tag{9}$$

となる。これを微分して

$$\dot{x}(t)=e^{\frac{-3}{2}t}C_2\left(\frac{-3}{2}\sin\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right) \tag{10}$$

初期条件より

$$\dot{x}(0)=\frac{C_2}{2}=2 \tag{11}$$

$$C_2 = 4 \tag{12}$$

よって

$$x(t) = 4e^{\frac{-3}{2}t} \sin\frac{t}{2} \tag{13}$$

となる。