物理学概説2011　期末テスト　(再試)

(模範解答)

2011.8.10

問題１

(問題省略)

解答

(1)

①

t=x/5

y=25(x/5) ^{2}+5(x/5)+10=x^2+x+10

②

t=x/a

y=cos ω(x/a)

(2)

$v_x = \frac{dx}{dt} = 5$，$v_y = \frac{dy}{dt} = 50t + 5$

(3)

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$，$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 50$

(4)

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0 + 50^2} = 50$

問題２

(問題省略)

解答

(1)

$F = mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta$，$W = Fd$

(2)

$K = \frac{1}{2}mv_0^2$

(3)

$K = W$ より

$Fd = \frac{1}{2}mv_0^2$

$d = \frac{mv_0^2}{2F}$

(4)　$F = ma$ より、

$d = \frac{mv_0^2}{2ma} = \frac{v_0^2}{2a}$

問題３

(問題省略)

解答

(1)

$$a^2 = r^2 + z^2$$
$$r^2 = a^2 - z^2$$
$$r = \sqrt{a^2 - z^2}$$

(2)

$$r = \sqrt{a^2 - z^2}$$
$$dv = \pi r^2 dz$$

(3)

$$dm = \rho dv = \rho\pi r^2 dz = \rho\pi\left(a^2 - z^2\right)dz$$

(4)

$$dI = \frac{dm}{2} r^2$$

$$I_z = \int dI = \int \frac{r^2}{2} dm$$

ここで、

$r = \sqrt{a^2 - z^2}$ と

$dm = \rho\pi\left(a^2 - z^2\right)dz$ を代入

$$I_z = \int dI = \int_{-a}^{a} \frac{\left(a^2 - z^2\right)}{2} \rho\pi\left(a^2 - z^2\right)dz$$

$$= \frac{\rho\pi}{2}\int_{-a}^{a}\left(a^2 - z^2\right)^2 dz = \frac{\rho\pi}{2}\int_{-a}^{a}\left(a^4 - 2a^2z^2 + z^4\right)dz$$

$$= \frac{\rho\pi}{2}\left[a^4 z - \frac{2}{3}a^2z^3 + \frac{1}{5}z^5\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{\rho\pi}{2}\left[\left(a^5 - \frac{2}{3}a^5 + \frac{1}{5}a^5\right) - \left(-a^5 + \frac{2}{3}a^5 - \frac{1}{5}a^5\right)\right]$$

$$= \frac{\rho\pi}{2}\frac{16}{15}a^5 = \frac{8\rho\pi}{15}a^5$$

問題４

(問題省略)

解答

(1) 運動方程式は

$$m\ddot{y} = -k\dot{y} - mg \qquad (1)$$

両辺を m で割って

$$\ddot{y} = -b\dot{y} - g \qquad (2)$$

$\dot{y} = v$ と置きなおすと

$$\frac{dv}{dt} = -\left(bv + g\right) \qquad (3)$$

$$\int \frac{b}{bv_y + g}\, dv = -b\int dt \qquad (4)$$

$$\ln\left|bv + g\right| = -bt + A_1 \qquad (5)$$

$$bv + g = \pm e^{-bt + A_1} \qquad (6)$$

一般解は次式になる。

$$Ce^{-bt} = bv + g \qquad (7)$$

C は定数である。初期条件 t=0 のとき v=0 より

$$v(t) = \dot{y}(t) = \frac{-g}{b}\left(1 - e^{-bt}\right) \qquad (8)$$

位置は(8)を積分して求まる。

$$y = \int \frac{-g}{b}\left(1 - e^{-bt}\right) dt \qquad (9)$$

初期条件 t=0 のとき $y=y_0$ より

$$y(t) = y_0 - \frac{g}{b}t + \frac{g}{b^2}\left(1 - e^{-bt}\right) \qquad (10)$$

空域抵抗が無い場合の運動方程式は

$$m\ddot{y} = -mg \qquad (11)$$

上と同様に積分して

$$\dot{y}(t) = -gt \qquad (12)$$

$$y(t) = \frac{-1}{2}gt^2 + y_0 \qquad (13)$$

位置の違いは(10)から(13)を引いて

$$-\frac{g}{b}t + \frac{g}{b^2}\left(1 - e^{-bt}\right) - \left(\frac{-1}{2}gt^2\right) \qquad (14)$$

と表される。

問題５

(問題省略)

解答

$x(t)=e^{\lambda t}$ とおく。$\dot{x}(t)=\lambda e^{\lambda t}, \ddot{x}(t)=\lambda^2 e^{\lambda t}$ である。これらを問題式に代入すると、

$$\lambda^2+5\lambda+6=0 \tag{15}$$

これを解いて

$$\lambda_1=-2,\quad \lambda_2=-3 \tag{16}$$

異なる２つの実数解が得られたため、この方程式は過減衰である。問題式の１次独立の解は

$$x_1(t)=e^{-2t}, x_2(t)=e^{-3t} \tag{17}$$

となる。よって問題式の一般解は

$$x(t)=B_1e^{-2t}+B_2e^{-3t} \tag{18}$$

と表される。B_1 および B_2 は任意定数である。